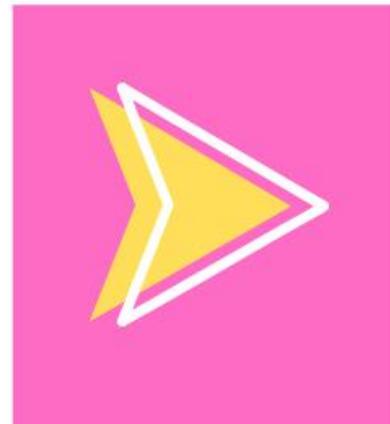
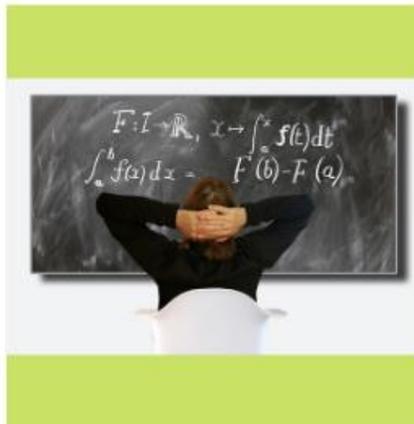




CÁLCULO DIFERENCIAL

CUADERNILLO
para el estudiante



**ASESORÍA
ACADÉMICA**



**CUARTO
SEMESTRE**

Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria y Ciencias del Mar

Créditos

Desarrollo de Contenido

Víctor Manuel Talamante Estrada

Omar Meraz Dávila

Damián Chávez Díaz

Revisión técnico - pedagógica

Arit Furiati Orta

Itandehui García Flores

Apoyo

Nélyda Fosado Revilla

Segunda edición, 2021

DGETAyCM

México

Introducción

El cuadernillo de Asesorías Académicas de la asignatura de Calculo Diferencial, forma parte de una colección de recursos de apoyo para jóvenes estudiantes de los Centros de Bachillerato Tecnológico Agropecuario (CBTA), Centros de Bachillerato Tecnológico Forestal (CBTF), Centros de Estudios Tecnológicos en Aguas Continentales (CETAC), Centros de Estudios Tecnológicos del Mar (CETMAR), los cuales tienen el propósito de ofrecerte elementos para lograr los aprendizajes requeridos y favorecer tu desarrollo académico.

En la primera sección te presentamos aspectos relacionados con la Asesoría Académica que te permitirán ubicarla como elemento de apoyo a tu trayectoria académica.

En la segunda sección hay actividades que te ayudarán a ubicar tus áreas de oportunidad, partiendo de la recuperación de tus aprendizajes; así mismo, podrás reforzar aspectos conceptuales que faciliten la comprensión del contenido disciplinar, y a la vez, se convierten en apoyo para promover la comprensión lectora y habilidad matemática promoviendo el desarrollo de tu perspectiva crítica.

Encontrarás actividades de reflexión, análisis, lecturas, ejercicios, juegos, problemas a resolver, entre otras, que podrás poner en práctica para comprender que el cálculo diferencial forma parte de tu vida en la interacción cotidiana, para actuar de manera reflexiva, razonada y razonable; así como para hacer frente a los problemas vitales, para formularse preguntas sobre ellos, para tomar decisiones relativas a las situaciones que enfrentan cotidianamente.

Esperamos que este material constituya una herramienta valiosa para tu formación y sea útil para apoyar tu proceso de aprendizaje del cálculo diferencial de manera creativa. Te recomendamos que el cuaderno lo sigas de manera secuencial ya que te llevara de la mano con los temas de la asignatura.

La Asesoría Académica

La **asesoría académica** es un servicio a través del cual encontrarás apoyo para favorecer el logro de tus aprendizajes. Se brinda mediante sesiones de estudio adicionales a la carga horaria reglamentaria y se te apoya para despejar dudas sobre temas específicos. También se te recomiendan materiales adicionales (bibliografía complementaria, ejercicios, resúmenes, tutoriales, páginas web, entre otros), de los que podrás apoyarte para el estudio independiente y evitar el rezago académico.

La asesoría académica puede ser:

- a) **Preventiva:** acciones con los alumnos que tienen bajo aprovechamiento académico, han reprobado evaluaciones parciales o no lograron comprender algún contenido curricular, y que requieren apoyo para adquirir o reforzar aprendizajes específicos de alguna asignatura, módulo o submódulo. Consiste en lograr que el alumno mejore la calidad de sus aprendizajes, incremente su rendimiento académico y evite la reprobación.
- b) **Remedial:** son acciones con los alumnos que al finalizar el semestre han reprobado alguna asignatura, módulo o submódulo y requieren apoyo académico para mejorar los aprendizajes frente a las evaluaciones extraordinarias y en general para alcanzar los aprendizajes establecidos en el programa de estudios correspondiente. Su propósito es que los alumnos regularicen su situación académica y eviten el abandono escolar.

Índice temático

Lección 1. ¿Qué es una variable y qué es una constante?

Lección 2. Función, relación y regla de correspondencia

Lección 3. Función lineal

Lección 4. Función cuadrática

Lección 5. ¿Cómo sumar y multiplicar funciones?

Lección 6. Límites

Lección 7. ¿Qué es la variación lineal y la razón de cambio?

Lección 8. La derivada

Lección 9. Máximos y mínimos

Estructura didáctica

Cada lección se estructura por las siguientes secciones:



Explorando

Sección dirigida a reconocer tu nivel de conocimiento sobre la temática a abordar, puede contener preguntas abiertas, reactivos de opción múltiple, ejercicios, actividades, entre otros. Apoya en la detección de las necesidades formativas de los estudiantes, lo que permitirá tomar decisiones sobre las actividades de asesoría que se pueden desarrollar.



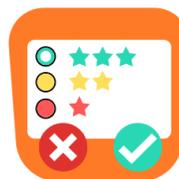
Comprendiendo

Se trabaja con lecturas que brindan elementos para la comprensión de los contenidos (temáticas) que se abordan en la asesoría académica y promueve la habilidad matemática y comprensión lectora, constituye un elemento para el estudio independiente.



Practicando

Promueve la ejercitación e integración de contenidos que se abordan en la lección. Refiere el desarrollo de estrategias centradas en el aprendizaje (elementos didácticos para brindar orientaciones a partir de ejercicios como resolución de problemas, dilemas, casos prácticos, etc). Permite poner en práctica lo revisado en la sección de habilidad lectora y facilita el aprendizaje de los contenidos temáticos.



Auto evaluación

Aporta elementos para que te autoevalúes y tomen junto con tu asesor académico medidas oportunas para continuar con tu proceso de aprendizaje.



Investigando

Se te proporcionan recomendaciones sobre recursos de apoyo y material centrado en áreas específicas, para fortalecer la temática estudiada.

Lección 1. ¿Qué es una variable y qué es una constante?



Explorando

Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es una variable?

2. ¿Qué es una constante?

3. ¿Cuántos tipos de variables conoces?

4. En las siguientes expresiones identifica con un círculo las variables y con un cuadrado las constantes:

$$y = x - 5$$

$$x+5= y-3$$

$$x^2 = 5$$



Variable

Es una letra que representa un valor numérico desconocido. Se representa con las últimas letras del alfabeto (p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z), normalmente x o y . Por ejemplo, $x + 2 = 3$, aquí "x" es una variable cuyo valor es 1. Una variable puede ser dependiente o independiente.

$$0 \quad x^2 + 2x + 1 =$$

variable

Una variable es independiente cuando esta no depende de otras variables. Mientras que una variable dependiente, depende de una o más. Por ejemplo, en la ecuación cuadrática $y = x^2 + 1$. Aquí, la letra "y" está en función de x . La letra "y" además es una variable dependiente, cuyo valor depende de los valores que tome "x". Mientras que "x" es independiente, ya que "x" puede tomar cualquier valor.

Ejemplos de variables dependiente e independientes

Con una variable:

una variable $\rightarrow x + 2 = 7$

$5 = y$ \leftarrow una variable

Con dos o más variables:

Variable uno $\rightarrow x + y = 1$
Variable dos

Variable uno $\rightarrow 2x - 3 + y = z$ Variable tres
Variable dos

Variable dependiente:

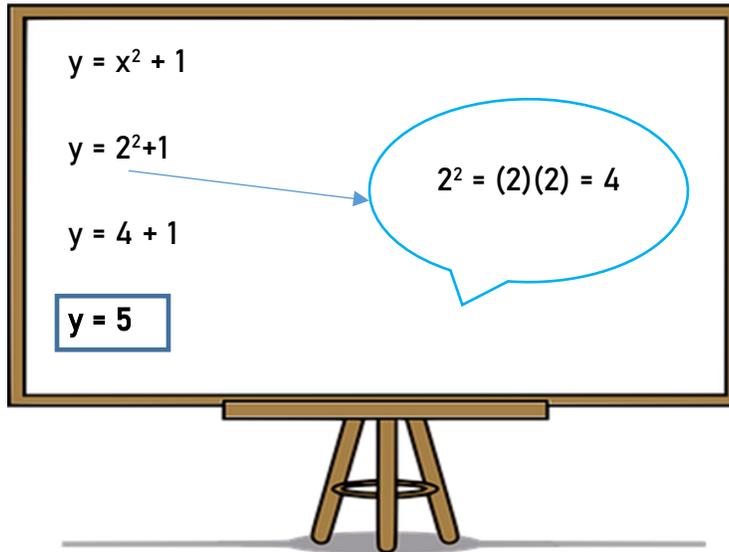
$y = x^2 + 1$ \rightarrow
que tendrá

la variable "y" es la dependiente ya que el valor

depende del valor que tenga la variable independiente "x".

En este ejemplo si la variable “x” vale 2, la variable dependiente “y” tendrá el valor de 5.

Desarrollo:



Constante

Una constante es un valor fijo, en matemáticas una constante es una magnitud que no cambia con el paso del tiempo, es un número por si solo o algunas veces se representan con las primeras letras del alfabeto (a, b, c, d, etc.).

Ejemplos:

- 1.- “ $x + 5 = 9$ ”, 5 y 9 son constantes.
- 2.- “ $x + a = 6$ ”, a y 6 son constantes

María y Rafa están haciendo un viaje por carretera, como están circulando por una autopista muy buena, han podido ir a 100km/h de velocidad durante la última media hora.



Como a lo largo de la última media de hora de viaje la velocidad ha sido la misma, podemos decir que, la velocidad del coche de María y Rafa ha sido una **CONSTANTE**.

Para que esto haya podido pasar el motor del coche ha tenido que ejercer distintas fuerzas de empuje, es decir, en las bajadas el motor no ha necesitado empujar mucho para mantener los 100km/h, pero por el contrario, en las subidas, el motor ha tenido que empujar mucho más para que esa velocidad se mantuviera constante.

Esto quiere decir que la fuerza de empuje que ha hecho el motor del coche ha sido una **VARIABLE**, porque ha ido cambiando a lo largo del recorrido.



Practicando

En las siguientes expresiones encierra en un círculo las variables y en un cuadrado las constantes:

$$y + x - 3 = 5$$

$$x + a = b - 2$$

$$c + 2 = z$$

$$x^2 = 2 - y$$

$$y^3 - d = x^2$$

$$a = x - w$$

En la siguiente expresión $y = x^2 - 1$, la variable independiente "x" va a tomar los valores de 1, 2 y 3, que valores tendrá la variable dependiente "y".

Para $x = 1$	Para $x = 2$	Para $x = 3$

Lee el siguiente problema y contesta lo que se te pide.

Una compañía telefónica tiene un costo de \$1.50 por minuto la llamada. Si se realizaron dos llamadas una de 5 min y otra de 12 min y se cobró \$7.50 y \$18.00 respectivamente, identifica la variable y la constante.



Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Soy capaz de identificar una variable en una expresión algebraica.		
Puedo reconocer una constante en una expresión algebraica.		
Logro diferenciar una variable independiente de una dependiente en una expresión algebraica.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		



Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica.

- Disfruta las matemáticas *Álgebra –Definiciones Básicas 2011* [En línea] Disponible en: <https://www.disfrutalasmatematicas.com/algebra/definiciones.html>
- Smartick –*Concepto de Constante y variable en matemáticas* [En línea] Disponible en: <https://www.smartick.es/blog/matematicas/problemas/constante-variable-matematicas/>
- KhanAcademyEspañol *¿Qué es una variable?* 6 de octubre de 2013. [En línea] Disponible en: <https://youtu.be/NHx-l-utduQ>
- iTecSchool *Contantes y Variables.* [En línea] Disponible en: https://youtu.be/kV_2M9hMxLY
- KhanAcademyEspañol *Variables, expresiones y ecuaciones* 6 de octubre de 2013. [En línea] Disponible en: <https://youtu.be/TIKOB8RjwxA>
- KhanAcademyEspañol *Términos de expresiones, factores y coeficientes.* 16 de marzo de 2014 [En línea] Disponible en: <https://youtu.be/ZwndPrSboKA>

Lección 2. Función, relación y regla de correspondencia



Explorando

Contesta las siguientes preguntas.

5. ¿Qué es una función?

6. ¿Qué es una relación?

7. ¿Cuáles de los siguientes pares ordenados pertenece a la regla de correspondencia $y = 3x - 1$?

$\{(1,3), (2,5), (5,11), (8,17)\}$

8. ¿Cuál es la regla de correspondencia de los siguientes pares ordenados?

$\{(1,3), (2,5), (5,11), (8,17)\}$



Relaciones y Funciones

¿Qué es función?

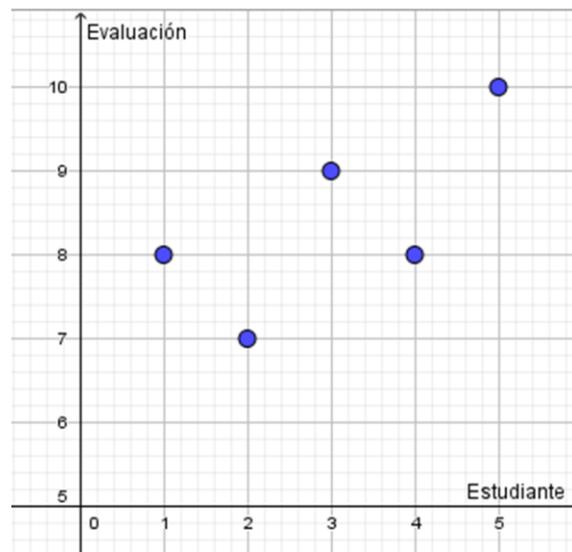
Comprendamos que es una función para enseguida definirla.

Al preguntar a cinco estudiantes que resultado obtuvieron en su evaluación del primer parcial en la asignatura de cálculo diferencial, se obtiene la siguiente tabla:

Estudiante	1	2	3	4	5
Evaluación	8	7	9	8	10

Observamos que a cada estudiante le corresponde solo un valor numérico de su evaluación.

Los valores de la tabla se pueden mostrar gráficamente donde se observa que efectivamente a cada estudiante le corresponde solo un valor numérico de su evaluación.



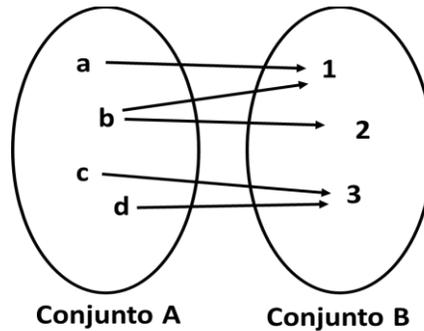
Entonces podemos concluir que **una función es una relación entre los elementos de dos conjuntos donde a cada elemento de un conjunto (dominio), le corresponde un valor del otro conjunto (imagen).**

La función generalmente se denota como $f(x)$ ó y .

¿Qué es relación?

Es la **correspondencia entre dos conjuntos** donde a cada elemento del primer conjunto (dominio), le corresponde al menos un elemento del segundo conjunto (imagen).

Ejemplo:



Y también lo podemos representar de la siguiente manera:

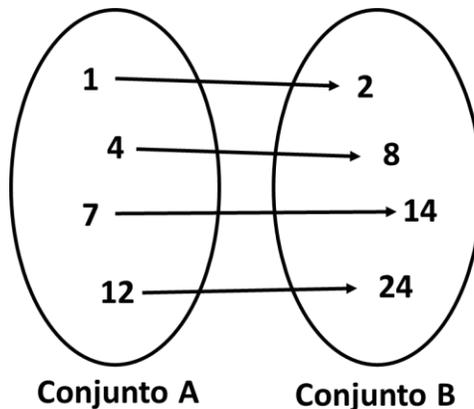
$$R = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 3)\},$$

donde observamos que a cada elemento del conjunto A, le corresponde al menos un elemento del conjunto B a excepción del elemento b del conjunto A, que le corresponden los elementos 1 y 2 del conjunto B.

¿Qué es Regla de correspondencia?

Es la forma en que se relacionan los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto y que generalmente corresponde a una expresión algebraica.

A cada elemento del conjunto A, le corresponde el doble de él que es un elemento del conjunto B. Esto se observa en el siguiente esquema:



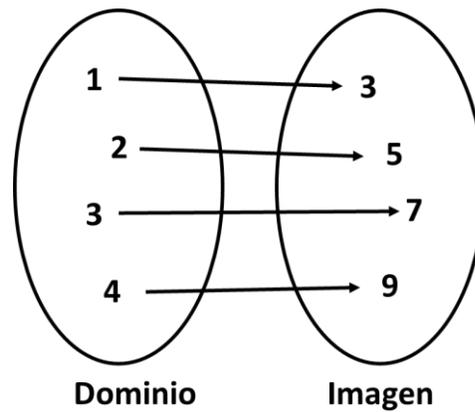
Y su expresión algebraica es $f(x) = 2x$, que corresponde a una función lineal.

Ejemplo:

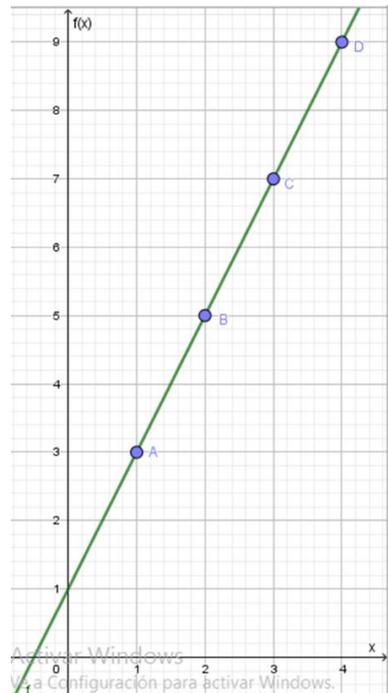
La regla de correspondencia de una función lineal es $f(x) = 2x + 1$, significa que, a cada elemento del dominio, le corresponde el doble de él aumentado en una unidad mismo que es un elemento de la imagen.

La regla de correspondencia $f(x) = 2x + 1$ para $x = 1,2,3,4$, se puede representar generalmente de la siguiente manera:

a) a través de un diagrama:



b) por medio de una gráfica:



c) Por medio de un conjunto de parejas

$$A = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$$

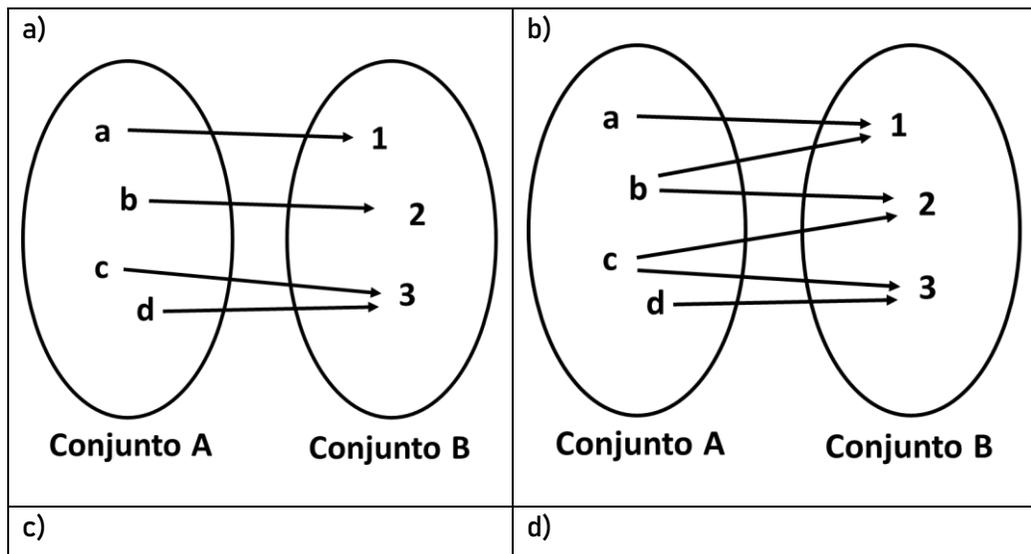
d) Por medio de una tabla:

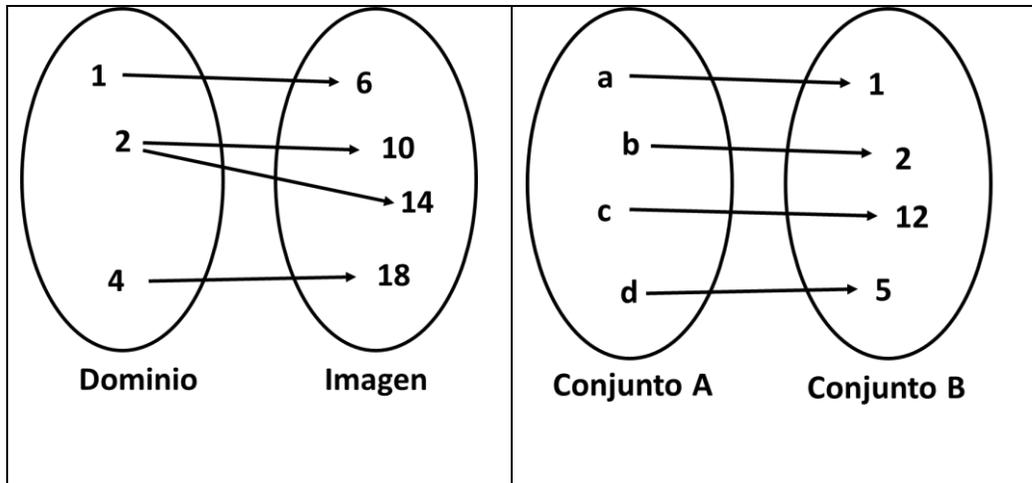
x	1	2	3	4
$f(x)$	3	5	7	9



Practicando

1. Identifica de las siguientes figuras, cual corresponde a una función y cual a una relación.

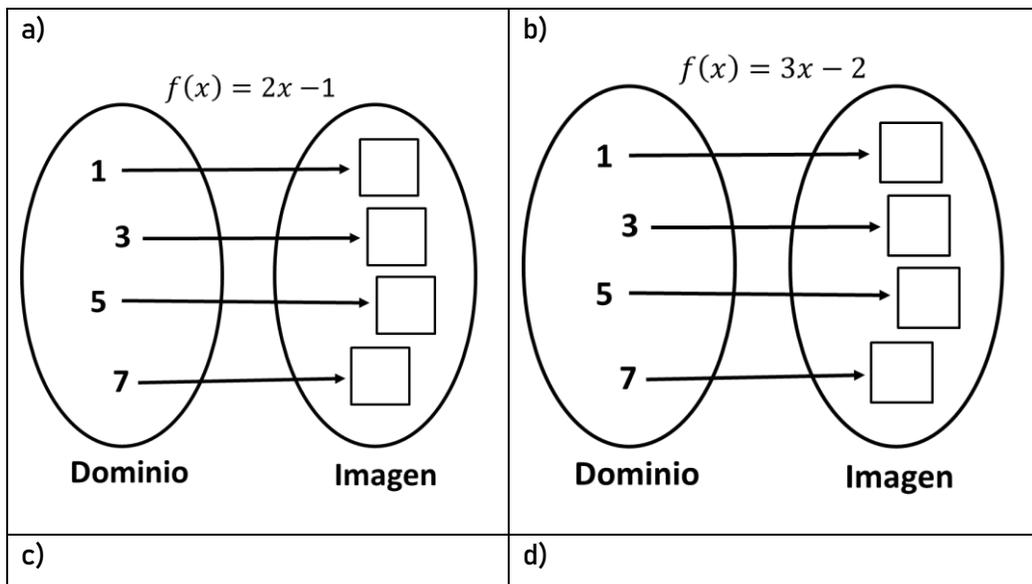


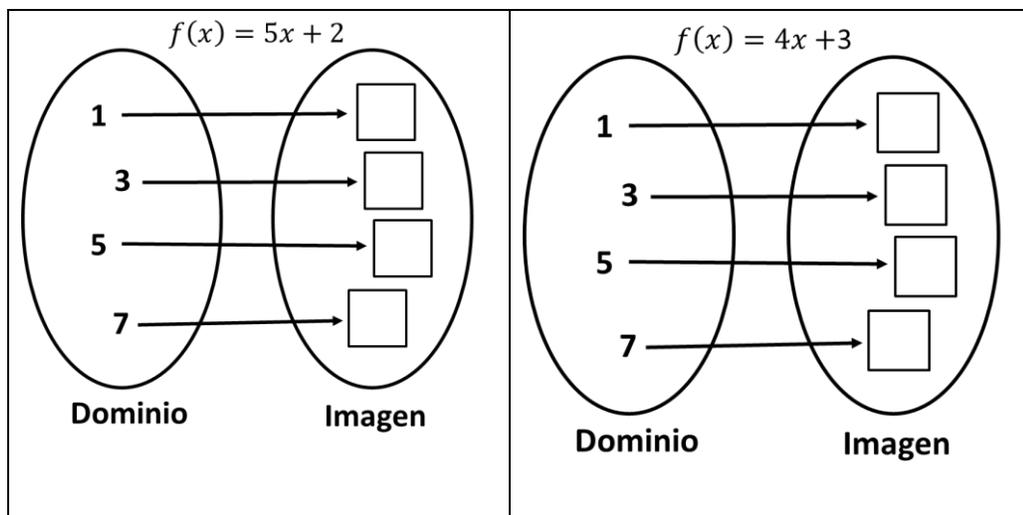


2. Si $f(x) = 4x - 3$, es la regla de correspondencia, completa la siguiente tabla:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1				17

3. Completa los valores en cada diagrama de acuerdo a la regla de correspondencia dada.





Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Identifico en una representación con diagramas cual corresponde a una función.		
Identifico en una representación con diagramas cual corresponde a una relación.		
De acuerdo a la regla de correspondencia, puedo encontrar valores faltantes en una tabla.		
Identifico en una gráfica los puntos que corresponden a una función		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		



Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

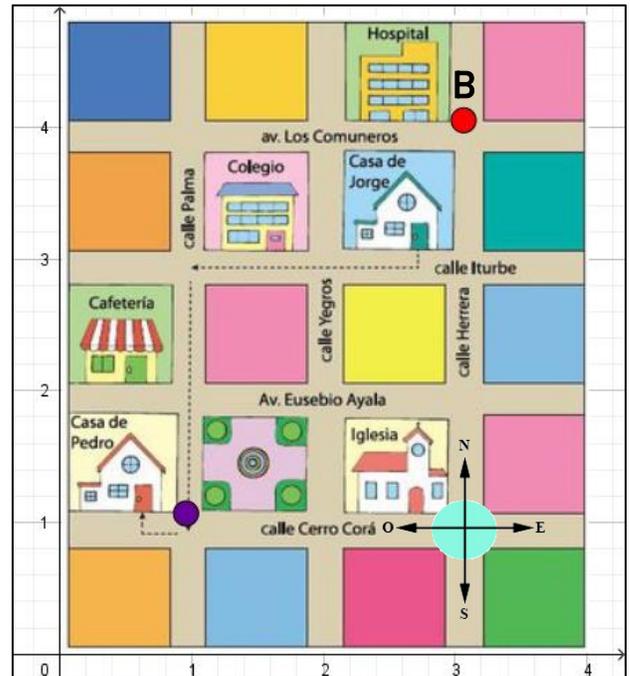
- Video regla de correspondencia: <https://www.youtube.com/watch?v=i7eVUi5bv54>
- Regla de correspondencia: <https://definicion.de/regla-de-correspondencia/>
<https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/relaciones-y-funciones/>

Lección 3. Función lineal



Observa el croquis y contesta las siguientes preguntas:

- ¿Qué coordenadas le corresponden al punto que se encuentra en el cruce de las calles Yegros e Iturbe?

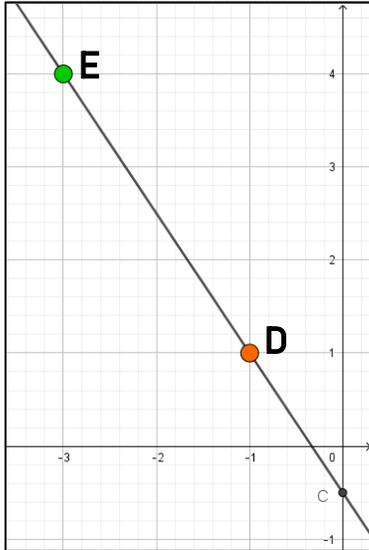


-
- ¿Qué coordenadas tiene el punto A ubicado en la esquina de la casa de Pedro?

-
- Describe la ruta para llegar del punto A al punto B con solo 2 indicaciones. Utiliza la rosa de los vientos para ubicar correctamente los cuatro puntos cardinales.

A

-
- En términos de ordenadas (y) y abscisas (x), ¿cómo expresas la ruta descrita anteriormente?
-



Este gráfico corresponde a la función $f(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Determina las coordenadas del punto D y del punto E.

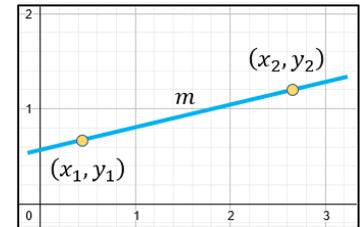
- En términos de ordenadas y abscisas, describe la ruta para llegar del punto D al punto E.



¿Recta y función lineal son lo mismo?

Como seguramente recordarás, en tu curso anterior de Geometría Analítica profundizaron bastante en el estudio de la **recta** como lugar geométrico y descubriste que existen diferentes formas de representarla por medio de una ecuación.

Además, conociste una diversidad de definiciones que sin duda llevaban a la misma concepción:



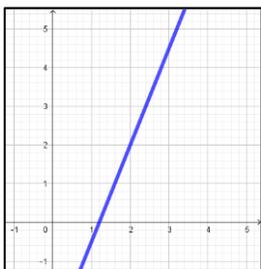
Es la figura geométrica que se obtiene al unir dos puntos, de modo que la distancia recorrida entre ellos, es la más corta



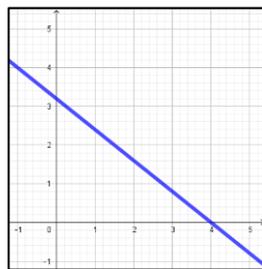
La recta es una sucesión de puntos colineales

Además, es importante recordar que toda recta cuenta con una inclinación que también es conocida como **Pendiente** y que su valor siempre es constante independientemente de los pares de puntos que se tomen para su análisis.

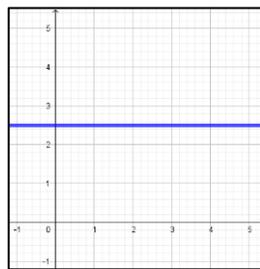
Rectas y sus pendientes.



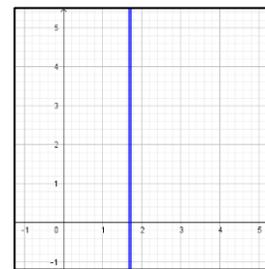
Recta con pendiente Positiva



Recta con pendiente Negativa



Recta con pendiente Neutra (cero)



Recta con pendiente Indefinida

Notarás entonces que cuando una recta se inclina hacia la derecha, es porque el valor de su pendiente es positivo y que si se inclina hacia la izquierda entonces la pendiente es negativa; mientras que, si el valor de la pendiente es cero, entonces estamos hablando de una recta horizontal.

Toda recta, es posible expresarla mediante la ecuación:

$$y = mx + b$$

Forma Pendiente Ordenada al origen

De donde:

m = Valor de la pendiente

b = Ordenada al origen (Valor donde la recta interseca el eje de las ordenadas)

Ahora bien, como recordarás de las Lecciones 1 y 2, y corresponde a la variable dependiente de una función, y que para el estudio del Cálculo Diferencial haremos un cambio de denotación para la variable dependiente:

$$y = f(x)$$

Por lo tanto, una recta puede expresarse como una función de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

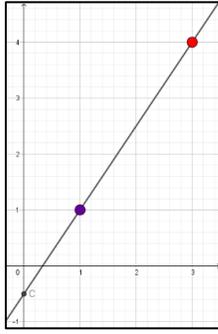


Vale la pena recordar en este momento que, dados dos puntos cualesquiera, el valor de la pendiente se calcula mediante:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si consideramos las coordenadas de los puntos Morado y Rojo, de la sección **Explorando** de esta lección, y procedemos a calcular la pendiente tendríamos entonces:

$$\begin{array}{cc} x_1, y_1 & x_2, y_2 \\ M(1, 1) & R(3, 4) \end{array} \quad m = \frac{4-1}{3-1} \rightarrow m = \frac{3}{2}$$



Por lo tanto, y a partir de la función $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ correspondiente a la gráfica de la izquierda, es posible comprender que:

- El valor de la pendiente corresponde al coeficiente de la variable independiente x de nuestra función, y que este lo podemos obtener mediante dos puntos conocidos.
- El lugar donde la recta corta el eje de las ordenadas, el punto C , corresponde al valor $-\frac{1}{2}$, o bien, -0.5 .

Por último, es importante puntualizar que las funciones que has revisado en lo que va de esta lección, son funciones de primer grado o lineales, y que su representación en el plano corresponde a una línea recta.



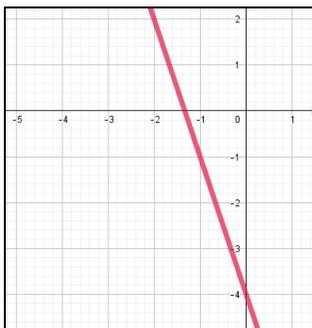
La pendiente juega un papel muy importante en el estudio de la recta y también lo será para el estudio de Cálculo Diferencial



Practicando

Determina el valor de la pendiente y de la ordenada al origen como se te solicita.

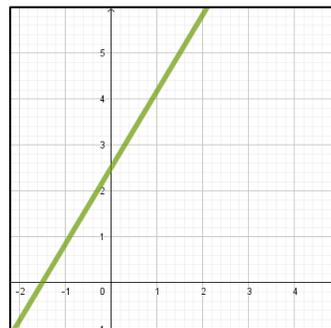
$$f(x) = -3x - 4$$



$$m = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

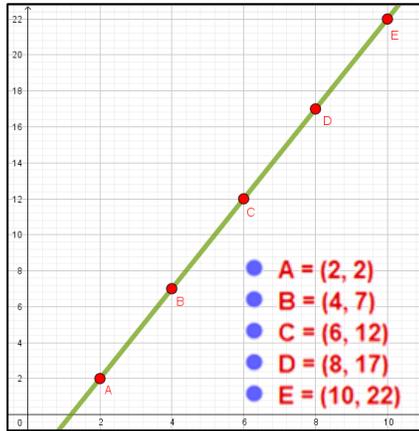
$$f(x) = \frac{5}{3}x + \frac{5}{2}$$



$$m = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \underline{\hspace{2cm}}$$

De acuerdo con los puntos que se encuentran sobre la recta que muestra el gráfico, determina el valor de las pendientes que se te solicitan.

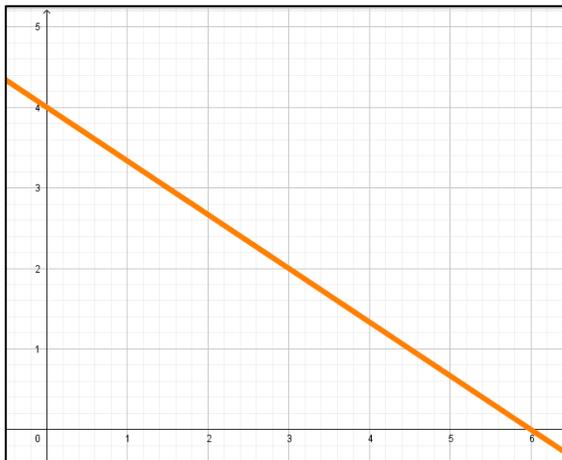


• $m_{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$

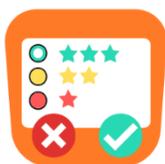
• $m_{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$

• $m_{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$

Determina la función lineal a partir del gráfico que se te presenta.



• $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$



Autoevaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Identifico correctamente la dirección de una recta.		
Identifico el valor de la pendiente y ordenada al origen de cualquier función lineal.		
Puedo calcular el valor de la pendiente de una función lineal a partir de dos puntos dados.		
Soy capaz de identificar una función lineal a partir de su gráfica.		
Puedo determinar la función lineal a partir de su gráfico.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		



Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Khan Academy, Cursos de Matemáticas para 3° semestre de bachillerato: Gráficas de línea y pendiente, Disponible en <https://es.khanacademy.org/math/eb-3-semester-bachillerato>
- Sangaku Maths, Teoría y ejercicios de matemáticas para secundaria, bachillerato y primeros cursos de carreras técnicas, Disponible en: <https://www.sangakoo.com/es/temas/ecuacion-punto-pendiente-de-la-recta>
- Phet, Interactive Simulations. University of Colorado Boulder. Simuladores del área de Matemáticas (Graficando rectas pendiente – intersección), disponible en: <https://phet.colorado.edu/es/simulation/graphing-slope-intercept>

Lección 4. Función Cuadrática



Explorando

Completa la siguiente tabla encontrando los valores de salida para la función indicada.

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 1$$

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



Grafica en el plano la función anterior apoyándote de la tabulación que realizaste.



Con base en el gráfico anterior, contesta las siguientes preguntas.



- En el intervalo $x \in [-3, -2]$ ¿la función “sube” o “baja”?

- ¿Y para el intervalo $x \in [-1.5, -0.5]$?

- ¿Qué ocurre para el intervalo $x \in [0, 3]$?

- ¿Qué crees que suceda para el intervalo $x \in [3, \infty]$?

- ¿Qué ocurre cuando $x = 0$?

- Con base en tu experiencia, ¿qué formación geométrica describe el gráfico?

- ¿Tienes idea de qué sucedería en el gráfico si el término cuadrático de la función fuera positivo? Es decir, que se tratara de la función $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

Completa la siguiente tabla escribiendo una lista de sinónimos para cada palabra propuesta.

Crecer	Decrecer	Máximo	Mínimo



Características y elementos de la función cuadrática

La función cuadrática es una de las más estudiadas debido a que pueden realizarse un sinnúmero de aplicaciones y en diferentes campos, pero:

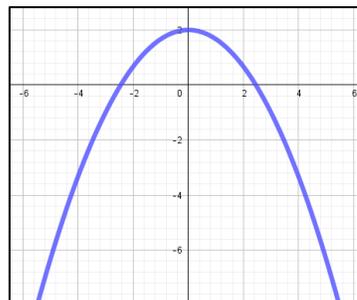
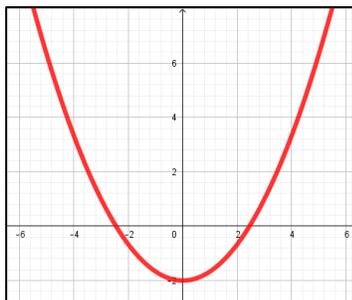
¿Qué es una función cuadrática?



Una función cuadrática, también conocida como función polinomial de segundo grado, corresponde a aquellas que mantienen la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c corresponden a cualquier número real o constante, pero donde necesariamente $a \neq 0$.

Asimismo, como puedes observar, el mayor exponente que toma la variable independiente (x) dentro de la función es 2; de esta manera cobra sentido el hecho de que a tenga que ser distinta de cero, ya que de lo contrario no tendríamos un término de segundo grado y, por consecuencia, no estaríamos hablando de una función cuadrática.

La gráfica de toda función cuadrática corresponde a la curva denominada **Parábola** y puede tener una de las siguientes formas:



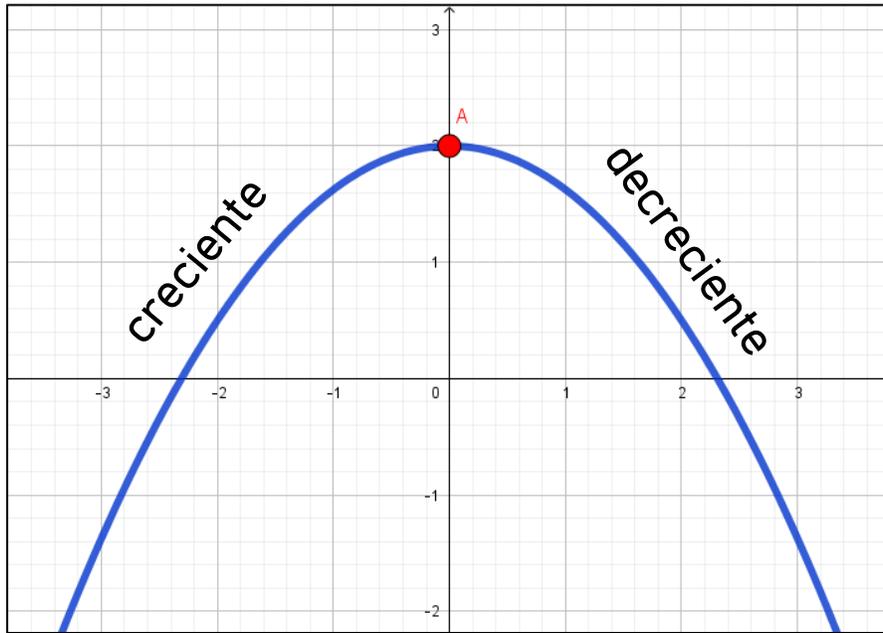
¿De qué va a depender la orientación de la parábola?

La orientación de una Parábola depende directamente del valor de la constante a , como bien puedes observar a continuación:

Si $a > 0$	Si $a < 0$
La parábola abre hacia arriba, y se dice que es convexa	La parábola abre hacia abajo, y se dice que es cóncava

Por otro lado, es necesario también puntualizar que una función cuadrática presenta intervalos donde es **creciente** e intervalos donde es **decreciente**, pero te puedes dar cuenta fácilmente.

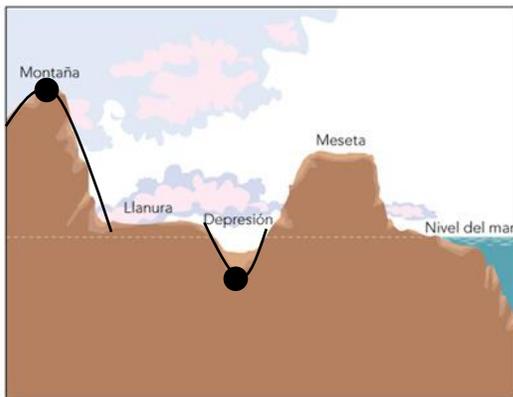
Considerando la función $f(x) = -\frac{3}{8}x^2 + 2$ y su representación gráfica:



Es posible observar que el vértice de la parábola, señalado por el punto $A(0,2)$, es el parteaguas de la misma y entonces notarás que observando la gráfica de izquierda a derecha, antes de llegar al vértice la función “**sube**” y después del vértice la función “**baja**”. Estos comportamientos son los que se identifican como **creciente** y **decreciente** respectivamente.



De una manera más formal y expresado por medio de intervalos, tenemos entonces que la función es creciente para el intervalo $x \in (-\infty, 0]$ y decreciente en el intervalo $x \in [0, \infty)$.



Por otra parte, es importante mencionar que el vértice de toda parábola representa también un **punto extremo**, es decir, aquel valor más grande o más pequeño que puede tomar en este caso la función cuadrática y que de manera particular reciben el nombre de máximo y mínimo respectivamente.

Si consideramos como ejemplo el relieve de la superficie terrestre, podríamos interpretar que el pico de una montaña representa un punto

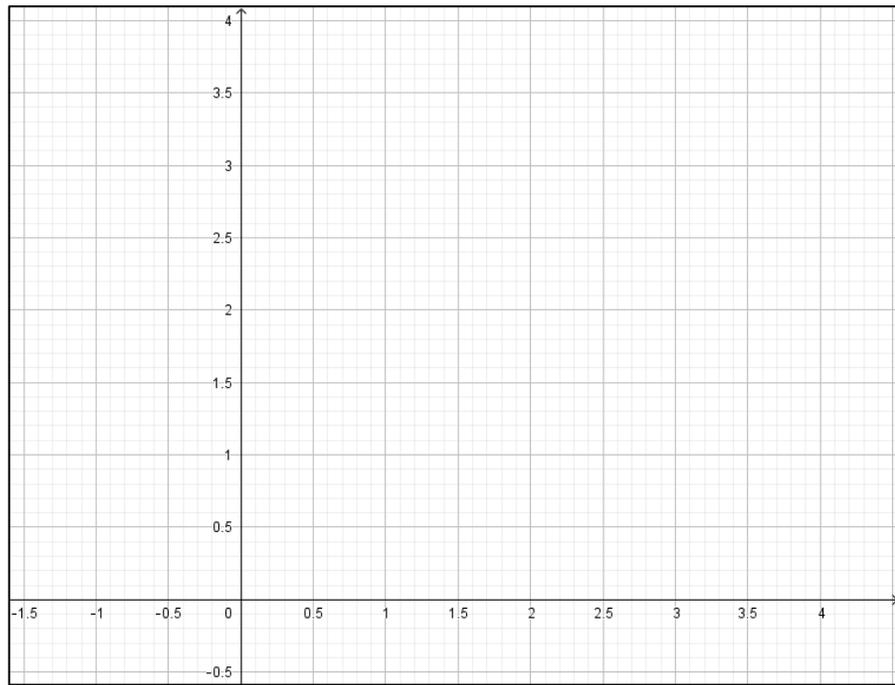
máximo, mientras que el fondo de una depresión el punto mínimo.



Practicando

Tabula y grafica la función $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$ y contesta las preguntas que se te solicitan.

x	$f(x)$
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	



- La función cuadrática que acabas de graficar ¿es cóncava o convexa?

- ¿Presenta un punto máximo o mínimo?

Determina si las siguientes funciones son cóncavas o convexas según corresponda, a partir de los valores enteros de la tabla de valores anterior.

- $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5$ _____

- $f(x) = 6x^2 - 4x + \frac{1}{4}$ _____

- $f(x) = \frac{1}{9}x^2$ _____



- $f(x) = x - x^2$

Completa los siguientes enunciados escribiendo sobre la línea el concepto que lo complementa correctamente.

- Una función cuadrática es cóncava cuando a la izquierda del vértice la función es:

_____ y a la derecha es _____.
 (creciente/decreciente) (creciente/decreciente)

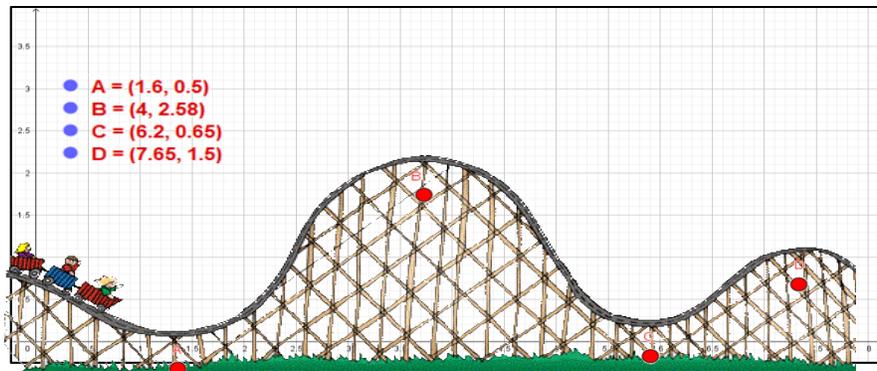
- Una función cuadrática es convexa cuando a la izquierda del vértice la función es:

_____ y a la derecha es _____.
 (creciente/decreciente) (creciente/decreciente)

- Cuando una función es cóncava entonces presenta un punto _____.
 (máximo/mínimo)

- Cuando una función es convexa entonces presenta un punto _____.
 (máximo/mínimo)

Una montaña rusa puede interpretarse como una “secuencia de parábolas” conectadas entre sí como se aprecia en la imagen. Con base en ello responde lo que se te solicita.

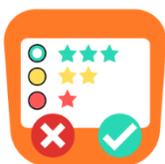


- ¿Qué puntos son máximos? _____

- ¿Cuáles representan mínimos? _____

- Con base en las posiciones de los puntos marcados en la imagen, ¿en qué intervalos la montaña rusa es creciente?

- ¿En cuáles intervalos es decreciente?



Autoevaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Identifico una función cuadrática.		
Puedo determinar la forma gráfica que describe una función cuadrática.		
Logro comprender cuándo una parábola es convexa y cuándo es cóncava.		
Soy capaz de identificar intervalos en los que la función es creciente o decreciente.		
Puedo identificar lo que es un punto máximo y un punto mínimo.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		



Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Khan Academy, Función cuadrática: ¿cómo la reconozco?, disponible en <https://es.khanacademy.org/math/copiloto-mapa-copiloto-matematicas-parte-1/copiloto2-funciones-reales-de-variable-real/copiloto2-parbolas-y-funcin-cuadratica/v/funcin-cuadratica-cmo-la-reconozco-matematicas-khan-academy-en-espaol>
- Phet, Interactive Simulations. University of Colorado Boulder. Simuladores del área de Matemáticas (Graficando cuadráticas), disponible en: <https://phet.colorado.edu/es/simulation/graphing-quadratics>

Lección 5. ¿Cómo sumar y multiplicar funciones?



¿Cuál es el resultado de las siguientes operaciones?

1. $3 - 5 - 17 - 12 - 15 - 6 =$
2. $3 + 5 - 17 + 12 - 15 + 6 =$
3. $-5 + 6 - 4 + 6 - 5 - 10 + 8 =$
4. $(3)(-7)(-2) =$
5. $(-4)(-2)(-5) =$
6. $(3)(-7) + (-2) =$
7. $(4)(-7) + (-2)(-2) =$
8. $(3 + 5 - 17) + (12 - 15 + 6) =$
9. $(3 + 5 - 17)(12 - 15 + 6) =$
10. $(3a + 5b - 7c) + (12a - 15b + 6c) =$

Para sumar y multiplicar funciones debes considerar lo siguiente:

Leyes de los signos en la adición

$2 + 3 + 2 = 7$	Al sumar cantidades con el mismo signo, se suman y el resultado tendrá el mismo signo de los sumandos
$(-2) + (-3) + (-2) = -7$	
$(2) + (-3) = -1$	Al sumar cantidades con diferente signo, se restan (sus valores absolutos) y el resultado tendrá el signo del sumando con mayor valor absoluto
$(-2) + (3) = 1$	

Leyes de los signos en la multiplicación

$(2)(3) = 6$	Al multiplicar cantidades con el mismo signo el resultado siempre será positivo
$(-2)(-3) = 6$	
$(+2)(-3) = -6$	Al multiplicar cantidades con signos diferentes el resultado siempre será negativo
$(-2)(+3) = -6$	

Propiedad distributiva

$(a)(b + c) = ab + ac$	La multiplicación de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos.
Ejemplo	
$(5)(2 + 3) = 5(2) + 4(3)$	

Leyes de los exponentes

$a^n a^m = a^{n+m}$	El producto de potencias con la misma base (distinta de cero) es igual a la base elevada a la suma de los exponentes.
Ejemplo	
$x^2 x^3 = x^{2+3} = x^5$	



Adición de funciones

¿Cómo sumar funciones?

Si tenemos dos funciones $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = 9x + 5$, las podemos sumar de la siguiente manera:

La suma de las dos funciones se puede expresar como:

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

Entonces la suma queda definida de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} f(x) + g(x) = \\ \swarrow \quad \searrow \\ (f + g)(x) = (2x^2 + 5x - 3) + (9x + 5) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{Términos} \\ \text{semejantes} \end{array}$$

Entonces reduciendo términos semejantes tenemos:

$$5x + 9x = (5 + 9)x = 14x$$

$$-3 + 5 = 2$$

Por lo tanto $(f + g)(x) =$

$$\begin{aligned} &= (2x^2 + 5x - 3) + (9x + 5) = 2x^2 + (5 + 9)x + (-3 + 5) \\ &= 2x^2 + 14x + 2 \end{aligned}$$

Multiplicación de funciones

¿Cómo multiplicar funciones?

Si tenemos dos funciones $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = 9x + 5$, las podemos multiplicar de la siguiente manera:

La multiplicación de las dos funciones se puede expresar como:

$$f(x) * g(x) = (f * g)(x)$$

Entonces

$$f(x) * g(x) = (2x^2 + 5x - 3)(9x + 5)$$

Aplicamos la propiedad distributiva

$$(2x^2 + 5x - 3)(9x + 5) = 2x^2(9x + 5) + 5x(9x + 5) - 3(9x + 5)$$

Resolvemos la expresión $2x^2(9x + 5)$

$$2x^2(9x + 5) = (2x^2)(9x) + (2x^2)(5) = 18x^3 + 10x^2$$

Resolvemos la expresión $5x(9x + 5)$

$$5x(9x + 5) = (5x)(9x) + (5x)(5) = 45x^2 + 25x$$

Resolvemos la expresión $-3(9x + 5)$

$$-3(9x + 5) = (-3)(9x) + (-3)(5) = -27x - 15$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}(2x^2 + 5x - 3)(9x + 5) &= 2x^2(9x + 5) + 5x(9x + 5) - 3(9x + 5) \\ &= 18x^3 + 10x^2 + 45x^2 + 25x - 27x - 15\end{aligned}$$

Y simplificando tenemos

$$= 18x^3 + 55x^2 - 2x - 15$$



Practicando

1. Si tenemos las siguientes funciones, realizar las operaciones que se indican.

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

$$g(x) = 5x^3 - 2x^2 + 4x + 2$$

$$h(x) = 2x^2 - 6x - 5$$

$$i(x) = 7x^2 + 8x + 1$$

$$j(x) = 3x + 6$$

$$k(x) = 6x - 2$$

Adiciones

1. $(f + g)(x) =$
2. $(f + h)(x) =$
3. $(f + i)(x) =$
4. $(f + j)(x) =$
5. $(f + k)(x) =$
6. $(g + h)(x) =$
7. $(h + i)(x) =$
8. $(g + i)(x) =$
9. $(f + g)(x) =$
10. $(i + j + k)(x) =$

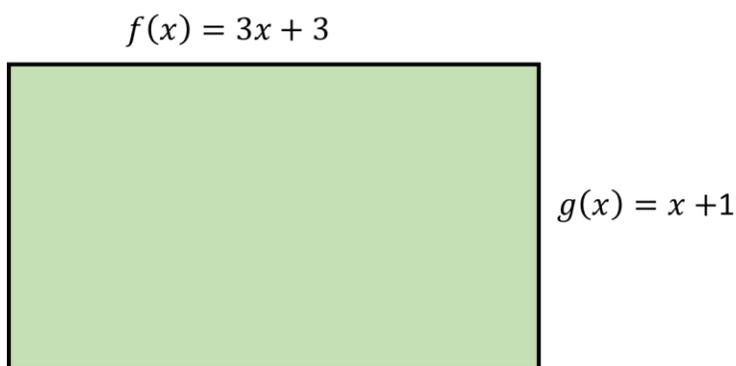
Multiplicaciones

1. $(f * k)(x) =$
2. $(f * j)(x) =$
3. $(h * i)(x) =$
4. $(h * j)(x) =$
5. $(i * k)(x) =$
6. $(j * k)(x) =$

2. Resolver la siguiente situación problemática

a). Se quiere cercar un terreno rectangular con alambre de púas. Para ello, se colocarán tres hilos de alambre en cada lado,

¿Cuál es la expresión algebraica que representa la cantidad de alambre que se necesita si las medidas de sus lados varían de acuerdo a la siguiente figura?



c) Para calcular el área de una superficie rectangular se realiza multiplicando la base por su altura.

¿Cuál la expresión que representa el área del terreno?



Autoevaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Puedo realizar la suma de dos funciones.		
Puedo realizar la suma de más de dos funciones.		
Puedo realizar la multiplicación de dos funciones.		
Puedo resolver una situación problemática que involucre la suma de funciones.		
Puedo resolver una situación problemática que involucre el producto de funciones.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		



Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Suma
<https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/combining-functions/a/adding-and-subtracting-functions>
- Multiplicación
<https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/combining-functions/a/multiplying-and-dividing-functions>
- Multiplicar funciones
<https://es.khanacademy.org/math/algebra2/manipulating-functions/combining-functions/v/product-of-functions>

Lección 6. Límites



Explorando

Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué es una función?

2. ¿Qué es una función algebraica?

3. ¿Cuál es el dominio de una función?

4. ¿Qué entiendes por límite?

Resuelve la siguiente sopa de letras

DOMINIO
VARIABLE
DEPENDIENTE
INDEPENDIENTE
FUNCION
LIMITE

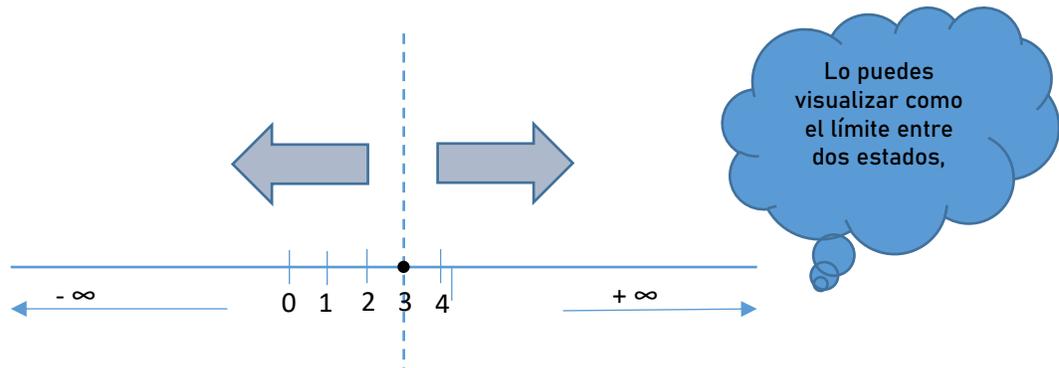
W	G	Y	F	Z	A	P	I	D	J	C	E	R	A	N	B
U	S	I	S	Y	Y	E	S	E	V	M	A	A	D	X	N
Y	D	S	T	E	O	Q	R	P	X	W	U	V	W	K	A
O	O	U	T	Z	X	Y	S	E	J	A	T	A	H	J	A
O	M	U	H	D	O	B	U	N	A	R	I	R	D	O	E
L	I	M	I	T	E	F	R	D	B	P	D	I	F	M	I
Z	N	A	E	F	N	H	Q	I	P	U	D	A	H	L	Q
C	I	L	R	U	L	U	G	E	E	X	B	F	B	P	
A	O	B	S	W	S	E	I	N	O	U	O	L	U	J	V
C	K	E	H	E	C	C	L	T	O	C	E	E	U	H	C
I	H	R	A	L	E	I	I	E	E	W	V	A	R	E	S
I	N	D	E	P	E	N	D	I	E	N	T	E	U	S	O
Q	U	M	E	U	H	U	V	E	V	V	G	A	I	Y	C
G	K	A	U	P	Y	L	X	O	Y	A	Z	D	R	A	I
Z	L	Y	M	G	X	M	G	A	G	P	U	U	E	A	V
F	U	N	C	I	O	N	N	I	R	R	H	R	O	G	T



Límites

La división que marca una separación entre dos regiones se conoce como límite. Este término también se utiliza para nombrar a una restricción o limitación, al extremo que se puede alcanzar desde el aspecto físico y al extremo a que llega un periodo temporal.

Vamos a ubicar en una recta numérica el límite en el punto 3, como tal este límite nos va a dar origen a dos regiones hacia la derecha y a la izquierda.



El límite en matemáticas es un punto hacia el cual se tiende, pero al que jamás se llega. El símbolo para expresar el límite de una función es:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

La representación matemática la podemos observar gráficamente de tal manera que conforme le damos valores que se acerquen por la izquierda y por la derecha a nuestra variable independiente x nuestra $f(x)$ o variable dependiente obtiene otro valor que se va acercando cada vez más al límite.

Observa el siguiente ejemplo para el límite de la función: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ cuando x tiende a -1 .

Se escribe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x + 1$

Vamos a acercarnos a -1 por la izquierda y vamos a tomar 3 valores muy cercanos -1.3, -1.2, y -1.1

$$f(-1.3) = (-1.3)^2 + 2(-1.3) + 1 = 0.09$$

$$f(-1.2) = (-1.2)^2 + 2(-1.2) + 1 = 0.04$$

$$f(-1.1) = (-1.1)^2 + 2(-1.1) + 1 = 0.01$$

Vamos a acercarnos a -1 por la derecha y vamos a tomar 3 valores muy cercanos -0.9, -0.8, y -0.7

$$f(-0.7) = (-0.7)^2 + 2(-0.7) + 1 = 0.09$$

$$f(-0.8) = (-0.8)^2 + 2(-0.8) + 1 = 0.04$$

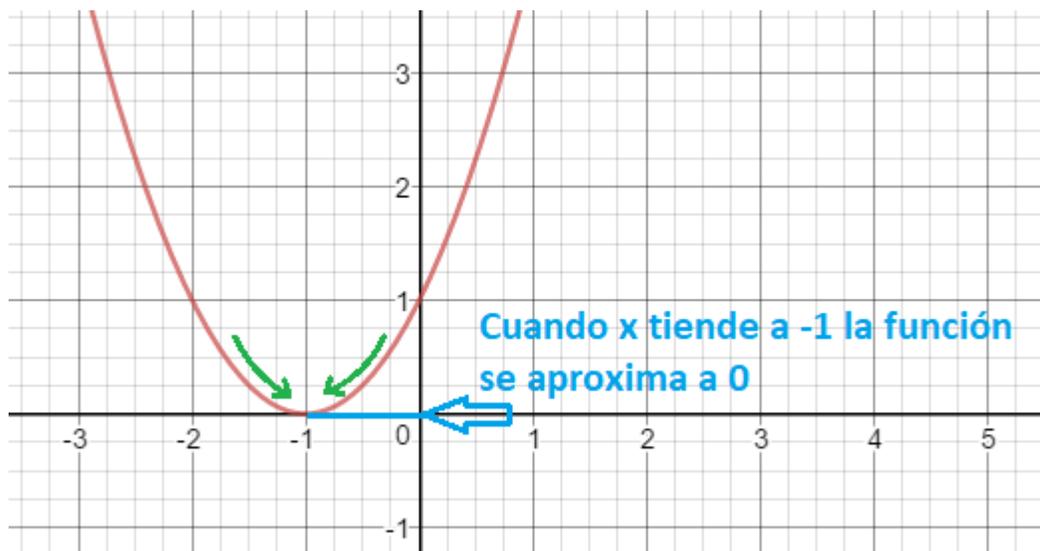
$$f(-0.9) = (-0.9)^2 + 2(-0.9) + 1 = 0.01$$

Puedes observar que conforme vamos tomando valores cercanos a -1 por izquierda y por derecha el resultado tiende a cero

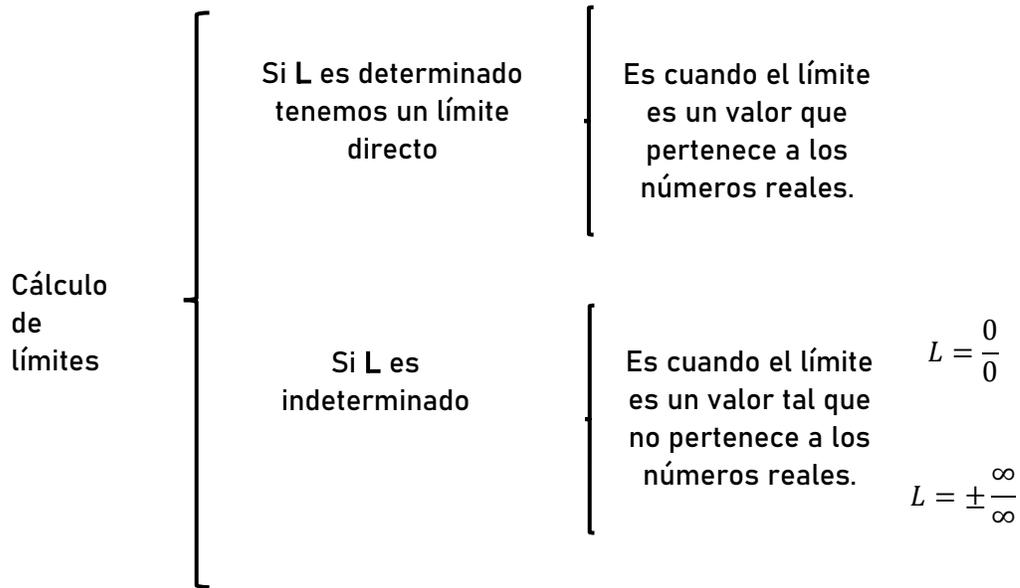
Ahora observa lo que pasa cuando calculamos el límite al que tiende la función:

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x + 1 = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0$$

Si lo vemos en una gráficamente, vemos como la gráfica de la función se aproxima al punto 0 en el eje y, cuando los valores de x se van a aproximando al punto -1 en el eje x:



El cálculo de los límites se realiza de dos formas diferentes:



El procedimiento para el cálculo del límite es sustituir en la función el valor al que tiende la variable de la función y realizar las operaciones indicadas.

Ejemplos:

$$1. -\lim_{x \rightarrow 2} (-5x^4) = -5(2)^4$$

$$= -5(16) = \boxed{-80}$$

Recuerda $(2)^4$
 $= (2)(2)(2)(2)$
 $= 16$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 2x + 2) = 2(0)^2 + 2(0) + 2$$

$$= \overset{0}{2(0)} + \overset{0}{2(0)} + 2 = \boxed{2}$$

Estos límites son
 determinados o directos
 ya que el resultado que
 se obtuvo es un número

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 1} \right) = \left(\frac{(1)^2 - 1}{1 + 1} \right) = \left(\frac{1 - 1}{2} \right) = \left(\frac{0}{2} \right) = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 9)}{(x + 3)} = \frac{((-3)^2 - 9)}{(-3 + 3)} = \frac{(9 - 9)}{0} = \frac{0}{0}$$

Este es un límite indeterminado ya que no se obtuvo un número real

Recuerda en los casos de límites donde el resultado es una indeterminación $\frac{0}{0}$ se deberán reducir a su mínima expresión a través de la factorización.

$$(x^2 - 9) = (x - 3)(x + 3)$$

Aquí tenemos una diferencia de cuadrados.

$$\frac{(x^2 - 9)}{(x + 3)} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)} = (x - 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -3 - 3 = -6$$

Una vez reducida a su mínima expresión el límite se calcula y se obtiene el valor.

$$3. - \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^3 + 1}{(-1)^2 - 1} = \frac{-1 + 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Aquí tenemos otro límite indeterminado para resolverlo tendremos que factorizar las expresiones de arriba y de abajo.

A continuación, factorizaremos la expresión x^3+1 de la siguiente manera:

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Después factorizamos x^2-1 de la siguiente manera:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Ahora vamos a sustituir estos factores en el límite para resolverlo:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{(-1) - 1} = \frac{1+1+1}{-1-1} = \frac{3}{-2} \quad \checkmark$$

$$4. - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x+8)(3-x^3)}{x^4-1} \right) = \left(\frac{(\infty+8)(3-\infty^3)}{\infty^4-1} \right) = \frac{\infty}{\infty} \quad \times$$

Ahora en los casos de límites donde el resultado es una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ se deberán dividir toda la función entre la variable de mayor exponente.

Primero deberás resolver la multiplicación de los binomios en el numerador:

$$(x+8)(3-x^3) = 3x - x^4 + 24 - 8x^3$$

A continuación, se ordenan de mayor a menor exponente:

$$-x^4 - 8x^3 + 3x + 24$$

Ahora se sustituye en el límite y en el siguiente paso se divide cada uno de los términos tanto del numerador como del denominador entre la variable de mayor exponente que es x^4 y se sustituye el valor del límite.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^4 - 8x^3 + 3x + 24}{x^4 - 1} \right) = \left(\frac{(\infty + 8)(3 - \infty^3)}{\infty^4 - 1} \right) = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{-x^4}{x^4} - \frac{8x^3}{x^4} + \frac{3x}{x^4} + \frac{24}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4} - 1} \right) = \left(\frac{-1 - \frac{8}{x} + \frac{3}{x^3} + \frac{24}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^4}} \right) = \left(\frac{-1 - \frac{8}{\infty} + \frac{3}{\infty^3} + \frac{24}{\infty^4}}{1 - \frac{1}{\infty^4}} \right) = \frac{-1}{1} = -1 \quad \checkmark$$

Se divide cada uno de los términos entre x^4

Se simplifican los términos

Se sustituye el valor de "x" que es ∞ y nos queda un número entre infinito eso nos da cero

Recuerda es válido un resultado de

$$\frac{\text{cantidad}}{0} = \infty \text{ ó } \frac{\text{cantidad}}{\infty} = 0$$

Se considera límite directo



Practicando

1.-Resuelve los siguientes límites directos:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} 3x + 5 =$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + x - 1 =$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^3 - 4x^2 + 2}{x + 3} =$

d) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 2}{x - 5} =$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x^2} =$$

2.- Resuelve los siguientes límites indeterminados. Recuerda son indeterminados ya que si se resuelven directamente el resultado sale $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ y deberás factorizar o dividir entre la variable de mayor exponente (revisa el material anterior):

:

$$f) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} =$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{x^2 - 3x + 2} =$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 + 4}{x^3 - 5} =$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 10}{-x^2 + 2x^3 - x + 3} =$$



Autoevaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Comprendo el concepto de límite.		
Identifico la variable de la función.		
Puedo resolver límites directos.		
Puedo resolver límites indeterminados.		
Puedo distinguir un límite directo de uno indeterminado.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		



Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica.

- Problemas y ecuaciones
<https://www.problemasyecuaciones.com/limites/calculo-limites-explicados-metodos-reglas-procedimientos-indeterminaciones-grados-infinito-resueltos.html>
- Matemáticas on line ekuatio.com
<https://ekuatio.com/limites-de-funciones-que-son-y-como-se-resuelven-limites-laterales/>
- Límites por medio de racionalización
https://youtu.be/_8eYl8qeMTY
- Límites indefinidos
https://youtu.be/dzd5PTeC_w

Lección 7. ¿Qué es la variación lineal y la razón de cambio?



Identifica en qué situación se presenta variación.

Coloca en el paréntesis una V si consideras que hay variación y NV si no hay variación.

1. () Al aumentar el precio de un artículo
2. () Al llenar de agua un tinaco.
3. () Comprar 12 piñatas.
4. () Trasladarse a un lugar
5. () Llenar de gasolina el tanque de un automóvil
6. () Guisar un par de huevos
7. () Número de estudiantes de un grupo
8. () La edad de los estudiantes de un grupo
9. () Al recortar un listón en 5 pedazos
10. () Al nadar en una alberca



Variación lineal y razón de cambio

Comprendamos que es variación lineal y razón de cambio.

La **variación lineal** la encontramos en diversas actividades en nuestro entorno y un ejemplo lo tenemos:

¡En la venta de fotocopias!

Una fotocopia tiene un valor de \$ 0.5, si queremos 15 fotocopias ¿cuánto tenemos que pagar?

Es obvio que la cantidad a pagar se obtiene realizando la siguiente operación $(0.5)(15)=7.5$ y, si pagamos 20 fotocopias tenemos que efectuar la operación $(0.5)(20)=10$, por lo tanto, observamos que se mantiene un factor común que es el precio de cada fotocopia y este actúa como **razón de cambio** (la relación entre dos variables el costo y el número de una fotocopia) al pagar las fotocopias que se requieren. Y si queremos expresar esta relación como una expresión general para cualquier número de fotocopias tenemos:

$$c(x) = 0.5x$$

donde x representa el número de fotocopias requerido y $c(x)$ la cantidad a pagar.

Si esta situación se representa en una tabla, tenemos lo siguiente:

x	1	2	3	15	20
$c(x)$	0.5	1	1.5	7.5	10

La razón de cambio se puede obtener de la siguiente manera:

Se toman dos columnas efectuando en cociente tomando como dividendo la diferencia del número de copias y como divisor la diferencia de sus costos.

Por lo tanto, si tomamos las dos primeras columnas de la tabla

1	2
0.5	1

El dividendo será la diferencia de los costos $(1 - 0.5)$ y el divisor la diferencia de los números de copia $(2 - 1)$, entonces la razón de cambio será:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{1-0.5}{2-1} = 0.5$$

Otro ejemplo lo observamos en el desplazamiento de un vehículo a velocidad constante. Si parte desde un punto situado a 70 km de su origen y se desplaza a 85 km/h. ¿A cuántos kilómetros del origen se encontrará en 3 horas?

La distancia se obtiene al realizar el producto $\left(85 \frac{km}{h}\right)(3h)$ y sumar la distancia (70km) donde se encontraba en relación a su origen:

$$\left(85 \frac{km}{h}\right)(3h) + 70km = 325km$$

Entonces podemos expresar esta relación de manera general

$$d = 85t + 70$$

Donde d representa el desplazamiento y t el tiempo.

Se puede representar esta situación en una tabla sustituyendo t en la relación $d = 85t + 70$, obteniendo:

Para $t = 1$ tenemos $d = 85(1) + 70 = 155$

Para $t = 2$ tenemos $d = 85(2) + 70 = 240$

Para $t = 3$ tenemos $d = 85(3) + 70 = 325$

Para $t = 4$ tenemos $d = 85(4) + 70 = 410$

Para $t = 5$ tenemos $d = 85(5) + 70 = 495$

Por lo tanto, la tabla queda de la siguiente manera:

t	1	2	3	4	5
d	155	240	325	410	495

La razón de cambio se obtiene, tomando dos columnas de la tabla y efectuando el cociente cuyo dividendo es la diferencia de la distancia y como divisor la diferencia del tiempo.

Por lo tanto, si tomamos dos columnas de la tabla:

3	4
325	410

El dividendo será la diferencia de la distancia (410 – 325) y el divisor la diferencia del tiempo (4 – 3), entonces la razón de cambio será:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{410-325}{4-3} = 85$$

Derivado de lo anterior, podemos concluir que la **variación lineal** es una variación directamente proporcional, donde la variación que experimenta una variable se refleja en el cambio proporcional que experimenta la otra variable, es decir si una variable aumenta la otra también aumenta y si una variable disminuye la otra también disminuye proporcionalmente y **razón de cambio** es la medida que nos indica como se modifica una variable en relación con otra.



Practicando

1. En cada situación problemática, elabora una tabla, calcula la razón de cambio y resuelve el problema.
 - a. Una persona vende tacos a \$ 40 la orden de 5 tacos y por cada taco adicional, cobra su valor proporcional. ¿Cuánto cobra por la venta de 12 tacos?
 - b. Una persona nada 30 metros en 6 minutos. ¿Cuántos metros nada a los 10 minutos si su velocidad se mantiene constante?
 - c. Una persona pinta $4 m^2$ de una protección metálica en 6 horas. ¿Cuántas horas necesita para pintar $20 m^2$?
 - d. 12 kilogramos de café cuestan \$ 1440. Si se compran 20 kilogramos ¿Cuánto se deberá pagar?

2. Encuentra la razón de cambio de las siguientes tablas.

a.

x	1	2	3	4	5
y	5	8	11	14	17

b.

x	1	2	3	4	5
y	6	11	16	21	27

c.

x	1	2	3	4	5
y	12	16	20	24	28



Autoevaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Puedo interpretar la variación lineal para resolver un problema.		
Logro interpretar la variación lineal para calcular la razón de cambio.		
Puedo calcular la razón de cambio interpretando los datos con variación lineal de una tabla.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		



Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

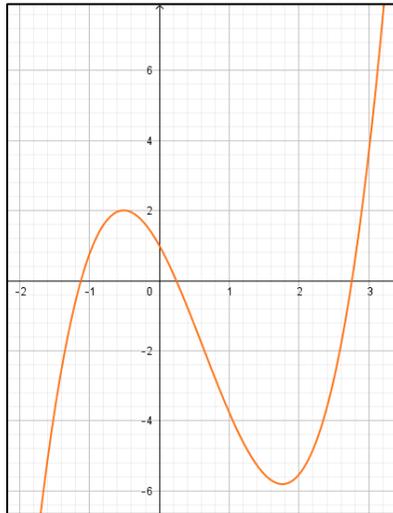
- Razón de cambio <https://definicion.de/razon-de-cambio/>
- Video, variación lineal y razón de cambio https://www.youtube.com/watch?v=h4_GCRm_4cQ

Lección 8. La Derivada



Explorando

Observa la siguiente gráfica alusiva a la función $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{18}{5}x + 1$ y marca con un punto la correspondencia para $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$.

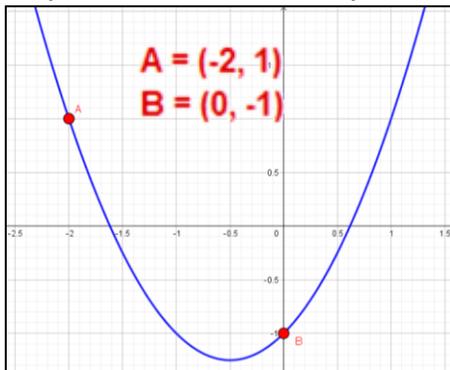


Evalúa la siguiente función para los valores que se te solicitan.

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 8$$

- $f(-2) =$ _____
- $f(3.2) =$ _____
- $f(0) =$ _____
- $f(5) =$ _____

A partir de los puntos A y B que se marcan en el gráfico de la función $f(x) = x^2 + x - 1$, determina la razón de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente.



$$R = \text{_____}$$

Razón de cambio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

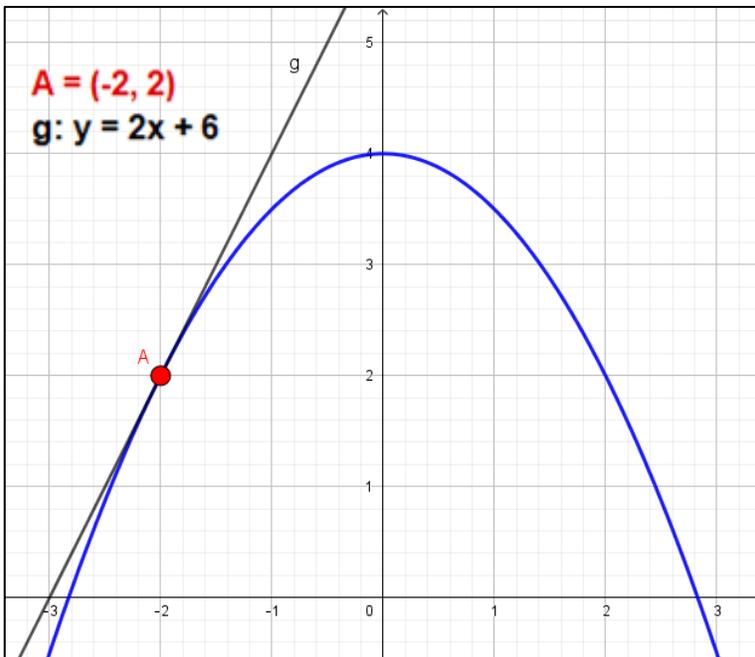


¿Qué es la Derivada?

Existen varias interpretaciones para comprender el concepto de derivada, pero en esta ocasión abordaremos el concepto desde la perspectiva analítica y que corresponde a la definición más clásica, la cual nos dice que la Derivada la podemos asumir como **el valor de la pendiente que tiene una recta que es tangente a una función, para un punto específico.**



Para comprender esta definición, tomemos como ejemplo la función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ que como bien sabrás, con base en la **Lección 4**, corresponde a una parábola cóncava como lo muestra el gráfico. Asimismo, notarás que en dicha parábola se encuentra sobre ella un punto **A** con coordenadas $(-2, 2)$ y que por dicho punto se ha trazado una recta tangente a la función, denotada como **g** y que corresponde a la recta $y = 2x + 6$.



Retomando lo aprendido en la **Lección 3** referente a la **Función Lineal**, recordarás entonces que el valor de la pendiente de la recta tangente **g**, corresponde a **2**. Entonces con base a la definición planteada, tenemos que la derivada de la función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ para el punto $A(-2, 2)$ es **2**, conforme a lo establecido en la definición.

Pero no siempre será así de simple, puesto que la función puede cambiar y el punto por el que pase la tangente también, para ello es importante considerar los siguientes pasos para obtener la Derivada General de una función y, posteriormente, encontrar el valor de la derivada particular para un punto en específico, veamos cómo realizarlo por medio de la regla general para obtener derivadas y utilizando como ejemplo la función anterior:



Pasos a seguir	Ejemplo
<p>1. Determinar $f(x)$ y $f(x + h)$</p>	<p>Sea: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ y por lo tanto: $f(x + h) = -\frac{1}{2}(x + h)^2 + 4$ desarrollando el binomio al cuadrado tenemos: $f(x + h) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2xh + h^2) + 4$ y multiplicando por el factor $-\frac{1}{2}$: $f(x + h) = -\frac{1}{2}x^2 - xh - \frac{1}{2}h^2 + 4$</p>
<p>2. Calcular la diferencia $f(x + h) - f(x)$</p>	<p>Sustituyendo correctamente y realizando la operación de la diferencia tenemos: $-\frac{1}{2}x^2 - xh - \frac{1}{2}h^2 + 4 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + 4\right)$ $= -\frac{1}{2}x^2 - xh - \frac{1}{2}h^2 + 4 + \frac{1}{2}x^2 - 4$ Reducimos términos semejantes: $-\frac{1}{2}x^2 - xh - \frac{1}{2}h^2 + 4 + \frac{1}{2}x^2 - 4$ Nos queda: $-xh - \frac{1}{2}h^2$</p>

<p>3. Calcular el cociente</p> $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	<p>Planteando el cociente tenemos:</p> $\frac{-xh - \frac{1}{2}h^2}{h}$ <p>Nos damos cuenta que nuestro numerador puede factorizarse por máximo factor común para reducir el cociente y nos queda:</p> $\frac{h(-x - \frac{1}{2}h)}{h}$ <p>Cancelamos y tenemos:</p> $\frac{\cancel{h}(-x - \frac{1}{2}h)}{\cancel{h}} = -x - \frac{1}{2}h$
<p>4. Calcular el Límite</p> $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	<p>Con base al resultado anterior calculamos el límite por sustitución directa y tenemos:</p> $\lim_{h \rightarrow 0} (-x - \frac{1}{2}h) = -x - \frac{1}{2}(0) = -x - 0 = -x$
<p>5. Concluir</p>	<p>Tenemos que la derivada general para la función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ es $f'(x) = -x$</p> <p>Observa que la notación para expresar el resultado de la derivada es $f'(x)$ ("efe" prima de "equis"), aunque también otra forma muy usual es y' ("ye" prima).</p>

Seguramente ahora te preguntarás por qué en el ejemplo con el que iniciamos este apartado tuvimos que la respuesta de la derivada fue 2. La razón está en que la derivada general de la función $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4$ es $f'(x) = -x$ y tenemos como punto específico $A(-2, 2)$, del cual el valor de la abscisa es $x = -2$. Entonces si sustituimos dicho valor en la derivada general tenemos:

$$f'(-2) = -(-2) = 2$$

Esto significa que, si cambiamos por otro punto cualquiera que se encuentre dentro del dominio de la función, digamos $x = 6$, estamos hablando del punto con coordenadas

(6, -14) y para este caso el valor de la derivada es $f'(6) = -(6) = -6$, por lo que si se trazara una recta tangente a la función por el punto (6, -14) su pendiente sería $m = -6$.

Obtención de la Derivada General de una función por fórmulas directas



Posiblemente estés considerando que la obtención de la derivada general de una función es un proceso muy laborioso, pero no es así, aunque los pasos descritos anteriormente son una manera de derivar, existen fórmulas directas que simplifican el proceso y son la forma más usual para realizarlo.

Las fórmulas directas son resultado de derivar funciones por el método anterior y que sentaron reglas para derivar cualquier tipo de función.

Es muy importante señalar, que el objetivo de derivar no radica únicamente en conocer el valor de la pendiente de la recta tangente a una función para un punto en específico, sino que va más allá. La finalidad de aprender a derivar es que en lo posterior serás capaz de aplicar el cálculo para atender diversas situaciones en variados contextos.

A continuación, se te presenta una tabla con 7 fórmulas directas y sus respectivos ejemplos para determinar la derivada general de funciones algebraicas.

Considera que $a = \text{constante}$, $n = \text{exponente}$ y que $u, v = \text{polinomio/multinomio}$

Fórmula	Ejemplo
1. Si $f(x) = a$ entonces $f'(x) = 0$	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = 8$ $f'(x) = 0$
2. Si $f(x) = ax$ entonces $f'(x) = a$	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = -\frac{4}{9}x$ $f'(x) = -\frac{4}{9}$
3. Si $f(x) = ax^n$ Entonces $f'(x) = an \cdot x^{n-1}$	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = 3x^4$ $f'(x) = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3$ $f(x) = -\frac{5}{x^6}$ es igual que $f(x) = -5x^{-6}$ $f'(x) = 30x^{-7}$ que equivale a $f'(x) = \frac{30}{x^7}$ $f(x) = 5x^{9/7}$ $f'(x) = \frac{45}{7}x^{2/7}$
4. Si $f(x) = u$ entonces $f'(x) = u'$ $u' \rightarrow \text{derivar cada término}$	<ul style="list-style-type: none"> $f(x) = 8x^3 - \frac{3}{5}x^2 + 9x - 1$ $f'(x) = 24x^2 - \frac{6}{5}x + 9$

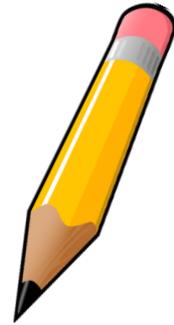
<p>5. Si $f(x) = u \cdot v$</p> <p>Entonces $f'(x) = u'v + uv'$</p> <p>$u' \rightarrow$ derivar cada término</p> <p>$v' \rightarrow$ derivar cada término</p>	<ul style="list-style-type: none"> • $f(x) = (6x^3 + 2x)(1 - x^2)$ <p>Entonces $u = 6x^3 + 2x$ y $v = 1 - x^2$</p> <p>Por lo que $u' = 18x^2 + 2$ y $v' = -2x$</p> <p>De ahí se obtiene:</p> $f'(x) = (18x^2 + 2)(1 - x^2) + (6x^3 + 2x)(-2x)$ <p>Efectuando los productos y reduciendo términos semejantes, la derivada general queda como:</p> $f'(x) = -30x^4 + 12x^2 + 2$
<p>6. Si $f(x) = \frac{u}{v}$</p> <p>Entonces $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$</p> <p>$u' \rightarrow$ derivar cada término</p> <p>$v' \rightarrow$ derivar cada término</p>	<ul style="list-style-type: none"> • $f(x) = \frac{8x-3}{x^2+1}$ <p>Entonces $u = 8x - 3$ y $v = x^2 + 1$</p> <p>Por lo que $u' = 8$ y $v' = 2x$</p> <p>De ahí se obtiene:</p> $f'(x) = \frac{(8)(x^2 + 1) - (8x - 3)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$ <p>Efectuando los productos y reduciendo términos semejantes, la derivada general queda como:</p> $f'(x) = \frac{-8x^2 + 6x + 8}{(x^2 + 1)^2}$ <p>Observa que el binomio al cuadrado que resulta en el denominador queda indicado únicamente.</p>
<p>7. Si $f(x) = a \cdot u^n$</p> <p>Entonces $f'(x) = an \cdot u^{n-1} \cdot u'$</p> <p>$u' \rightarrow$ derivar cada término</p>	<ul style="list-style-type: none"> • $f(x) = -5(4x - 7)^3$ $f'(x) = -5 \cdot 3(4x - 7)^{3-1} \cdot 4$ $f'(x) = -15(4x - 7)^2 \cdot 4$ <p>Siempre vamos a poder multiplicar los extremos, en este caso $-15 \cdot 4$ y tenemos:</p> $f'(x) = -60(4x - 7)^2$



Practicando

Determina por fórmulas directas la derivada general de las siguientes funciones algebraicas.

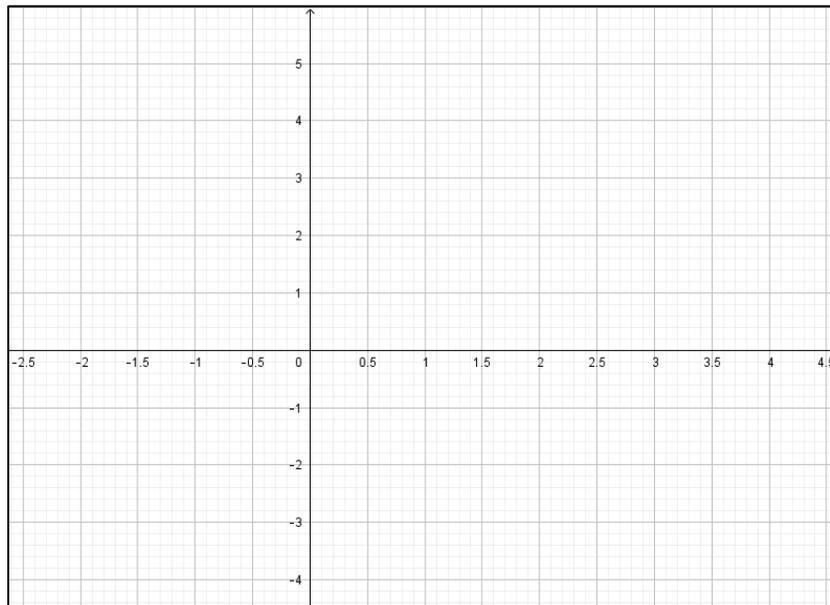
- $f(x) = 7 - 4x^3$ $f'(x) =$ _____
- $f(x) = 5x^{3/2}$ $f'(x) =$ _____
- $f(x) = x^3 - 16x^2 + 7x$ $f'(x) =$ _____
- $f(x) = \frac{3}{2x^6} - \frac{1}{6x^2} - \frac{4}{5x}$ $f'(x) =$ _____
- $f(x) = (2x - 4)(7x^2 + 3)$ $f'(x) =$ _____
- $f(x) = \frac{6x+1}{x^2-2}$ $f'(x) =$ _____
- $f(x) = 2(4x^2 - 5x)^3$ $f'(x) =$ _____
- $f(x) = \sqrt{(4x^3 - 2)^5}$ $f'(x) =$ _____



Atiende las indicaciones que se te proporcionan para analizar la siguiente función.

- Grafica la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en el intervalo $x \in [-2, 4]$

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	



- Determina por fórmulas directas la derivada general $f'(x)$
- Encuentra el valor de la derivada para cuando $x = 0$ y $x = 2$
 $f'(0) =$

 $f'(2) =$

Con base en el gráfico de la función y tus resultados responde:

- El valor de la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ para cuando $x = 0$ es $m =$ _____
- El valor de la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ para cuando $x = 2$ es $m =$ _____

Completa los siguientes enunciados a manera de conclusión.

- Si la derivada particular de una función es negativa, la recta tangente se inclina hacia la _____ y en ese instante la función es _____.
 (derecha/izquierda) (creciente/decreciente)
- Si la derivada particular de una función es positiva, la recta tangente se inclina hacia la _____ y en ese instante la función es _____.
 (derecha/izquierda) (creciente/decreciente)





Autoevaluación

Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Comprendo el concepto derivada como el valor de la pendiente de la recta tangente a una función en un punto particular.		
Entiendo la diferencia entre derivada general de una función y el valor de la derivada en un punto específico.		
Puedo encontrar la derivada general de una función algebraica por medio de la regla general		
Soy capaz de encontrar la derivada de una función algebraica por medio de fórmulas directas		
Puedo identificar si una función es creciente o decreciente a partir del valor particular de su derivada		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		



Investigando

Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- Khan Academy, Introducción a la derivada, disponible en <https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/derivative-intro-dc>
- Matemáticas Profe Alex. ¿Qué es la derivada? Concepto de derivada, disponible en <https://www.youtube.com/watch?v=uK4-s0ojHFg>
- Julio Profe. Derivada de una función usando la definición, disponible en <https://www.youtube.com/watch?v=sR5KYTap0Cg>

Lección 9. Máximos y mínimos



Explorando

Identifica en qué situación se presenta variación.

Coloca en el paréntesis una V si consideras que hay variación y NV si no hay variación.

11. () Al aumentar el precio de un artículo

1. () Al llenar de agua un tinaco.

2. () Comprar 12 piñatas.

3. () Trasladarse a un lugar

4. () Llenar de gasolina el tanque de un automóvil

5. () Guisar un par de huevos

6. () Número de estudiantes de un grupo

7. () La edad de los estudiantes de un grupo

8. () Al recortar un listón en 5 pedazos

9. () Al nadar en una alberca



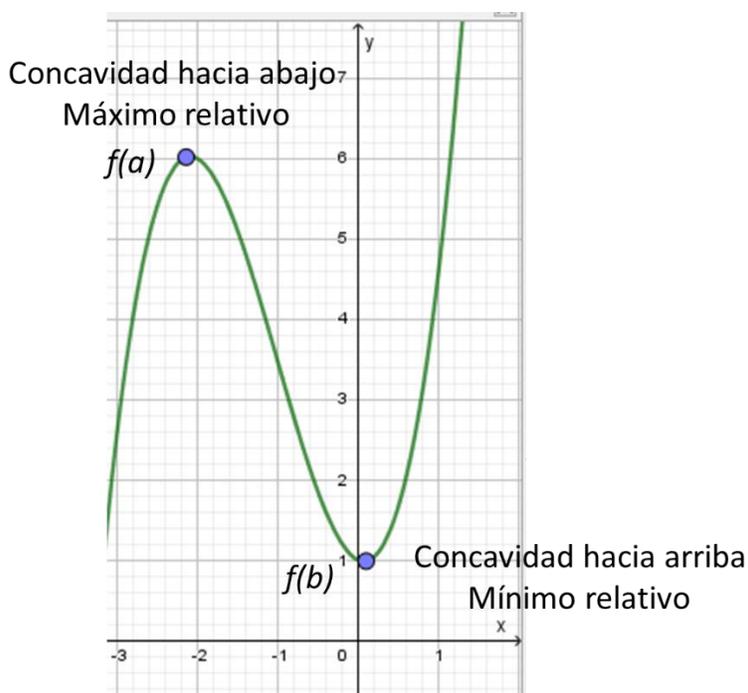
Criterio de la segunda derivada

Este método se basa en la concavidad de una función para calcular un máximo relativo o un mínimo relativo de una función

Entonces:

Una función f tiene un máximo relativo en el punto a , si $f(a)$ es mayor o igual que los puntos próximos al punto a .

Una función f tiene un mínimo relativo en el punto b , si $f(b)$ es menor o igual que los puntos próximos al punto b .



Procedimiento:

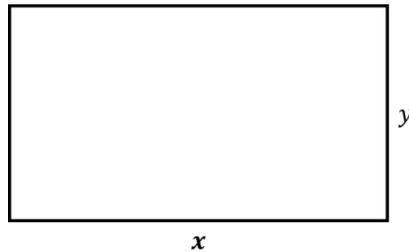
- Calcular la primera y segunda derivada de la función
- Igualar la primera derivada a cero y resolver la ecuación para encontrar sus valores críticos.
- Sustituir los valores críticos en la segunda derivada y resolver.
Si el resultado es positivo hay un mínimo relativo.
Si resulta es negativo hay un máximo relativo.
- Si el resultado es cero, no se puede afirmar si hay o no un máximo o un mínimo
- Para conocer las coordenadas de los puntos máximo y mínimo, sustituir los valores críticos en la función original,

Ejemplo

Se tiene 24 m de malla ciclónica y con ella se quiere cercar un área rectangular para sembrar hortaliza.

¿Qué dimensiones debe tener el área que se va a cercar de tal forma que su área sea máxima?

Podemos partir de la siguiente figura:



Donde el perímetro es $P = 2x + 2y$ y el área $A = xy$

Como tenemos 24 m de malla, entonces la expresión que representa el perímetro es:

$$2x + 2y = 24$$

Y despejando y , tenemos:

$$2x + 2y = 24$$

$$2y = 24 - 2x$$

$$y = \frac{24 - 2x}{2}$$

$$y = 12 - x$$

Sustituyendo $y = 12 - x$ en $A = xy$, el área a cercar será entonces:

$$A = xy$$

$$A(x) = x(12 - x)$$

$$A(x) = 12x - x^2$$

Aplicamos el procedimiento del criterio de la segunda derivada para encontrar las dimensiones que al cercar la superficie hacen que su área sea máxima.

Procedimiento

- Calcular la primera y segunda derivada de la función

$$A(x) = 12x - x^2$$

Primera derivada $\frac{d}{dx}A(x) = 12 - 2x$

Segunda derivada $\frac{d^2}{dx^2}A(x) = -2$

- Igualar la primera derivada a cero y resolver la ecuación para encontrar sus valores críticos.

$$\frac{d}{dx}A(x) = 12 - 2x$$

$$12 - 2x = 0$$

Resolviendo tenemos

$$12 - 2x = 0$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6 \quad \text{valor crítico } x = 6$$

- Sustituir los valores críticos en la segunda derivada y resolver.

Segunda derivada $\frac{d^2}{dx^2}A(x) = -2$

$$\frac{d^2}{dx^2}A(6) = -2$$

Como el resultado es negativo, entonces concluimos que hay un máximo relativo cuando $x = 6$

Como en $x = 6$ hay un máximo y como $y = 12 - x$, entonces sustituyendo,

$$y = 12 - x$$

$$y = 12 - 6$$

$$y = 6$$

Entonces se concluye que las dimensiones de la superficie a cercar es un cuadrado con dimensiones igual a 6 metros por lado.

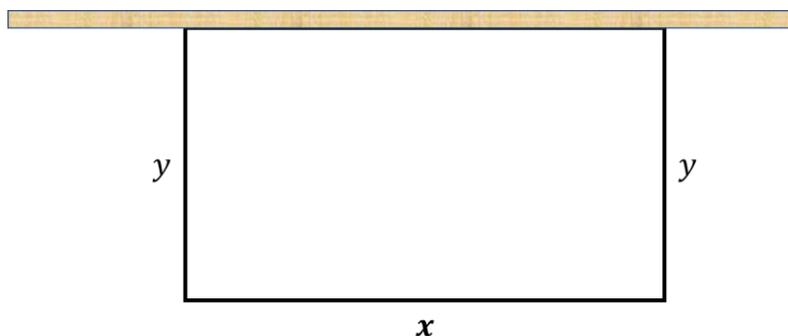


Practicando

Resolver cada situación problemática.

1. Se tiene 24 m de malla ciclónica y con ella se quiere cercar un área rectangular para sembrar hortaliza. Únicamente se colocará malla en tres lados ya que en uno de ellos se encuentra una barda, como se indica en la figura.

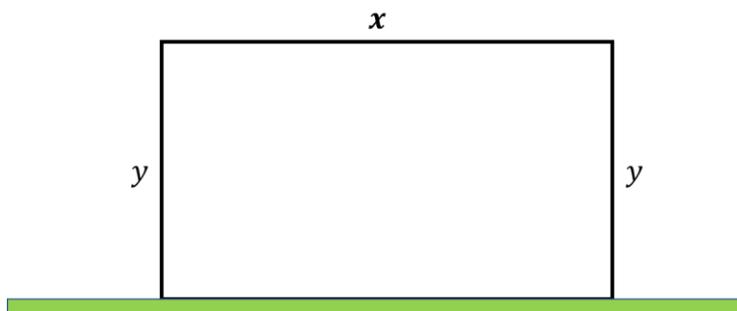
¿Qué dimensiones debe tener el área que se va a cercar de tal forma que su área sea máxima?



Donde el perímetro es $P = x + 2y$ y el área $A = xy$

Otro contexto

2. Se cuenta con una barra de hierro de 8 metros para construir una portería de manera que tenga la máxima superficie interior.
 - a) ¿Qué longitud deben tener los postes y el larguero para que la superficie interior sea máxima?



3. En una población se ha propagado por contaminación una enfermedad. Los estudios indican que el número de personas afectadas por la enfermedad está dado por la función: $f(x) = -2x^2 + 36x + 26$

Donde x es el número de días transcurridos desde que se detectó la enfermedad y $f(x)$ es el número de personas afectadas. ¿Cuál es el número máximo de personas afectadas?



Indicadores	Puedo lograrlo	Tengo dudas
Puedo derivar de manera sucesiva.		
Puedo encontrar los valores críticos.		
Identifico un máximo relativo.		
Identifico un mínimo relativo.		
Puedo resolver una situación problemática aplicando el criterio de la segunda derivada para identificar un máximo o un mínimo relativo.		
¿Sobre qué temas requiero más Asesoría Académica?		



Te sugerimos consultar los siguientes recursos para facilitar tu práctica de asesoría académica:

- https://edumatth.weebly.com/uploads/1/3/1/9/13198236/mximos_y_mnimos_de_un_a_funcion_de_una_variable_independiente.pdf
- Aprende matemáticas: <https://www.aprendematematicas.org.mx/unit/maximos-y-minimos/>
- Máximos y mínimos de una función: <https://www.youtube.com/watch?v=z-x86rnArgs>
- Aplicación de la derivada máximos y mínimos: <https://www.youtube.com/watch?v=CZbA2ckCjXA>

Referencias

- Allen, Á. (2008). *Álgebra intermedia*. México: Editorial Pearson.
- Ángel, J. (2008). MathCon: The mathematics firm. *Líneas rectas*. Obtenido de la red el 30 de septiembre de 2019 de:
http://www.math.com.mx/docs/sec/sec_0011_Graficas_Lineas.pdf
- Aurelio Baldor (2005). *Álgebra*. Editorial Patria.
- Ortiz, F., Ortiz, F. & Ortiz, F. (2019). *Cálculo diferencial*. Tercera Ed. México: Patria Educación.
- Purcell, E., Varberg, D. & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Novena Ed. México: Editorial Pearson Educación.
- Huirican, M. & Carmona, K. (2013). Guía de aprendizaje No. 2. Las funciones cuadráticas: una herramienta de modelación. Educación matemática. Segundo nivel o ciclo de Educación Media. Educación para personas jóvenes y adultas. Ministerio de Educación Gobierno de Chile. Obtenido de la red el 02 de octubre de 2019 de:
<http://epja.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/43/2016/04/GuiaN2MatematicaIIciclodeEM.pdf>
- Martínez, A., Juárez, J. & Vizcarra, F. (2012). *Cálculo I. Cálculo diferencial para bachillerato*. Primera Ed. México: Servicios Editoriales Once Ríos. Obtenido de la red el 03 de octubre de 2019 de:
http://uaprepasemi.uas.edu.mx/libros/5to_SEMESTRE/41_Calculo_Diferencial_I.pdf
- Ortiz, F., Ortiz, F. & Ortiz, F. (2019). *Cálculo diferencial*. Tercera Ed. México: Patria Educación.
- Purcell, E., Varberg, D. & Rigdon, S. (2007). *Cálculo diferencial e integral*. Novena Ed. México: Editorial Pearson Educación.
- Silva, J. & Orozco, J. (2018). *Cálculo Diferencial*. Primera Ed. México: Anglodigital
- Ortiz, F., Ortiz, F. & Ortiz, F. (2019). *Cálculo diferencial*. Tercera Ed. México: Patria Educación.

Imágenes tomadas de:

- <https://pixabay.com/es/>
- <https://www.canva.com/>
- <https://www.abc.com.py/edicion-impresasuplementos/escolar/aprender-a-usar-un-croquis-1338742.html>
- http://educativa.catedu.es/44700165/aula/archivos/repositorio/1000/1149/html/11_principio_de_superposicin.html
- <https://www.fisimat.com.mx/ecuacion-de-la-recta-punto-pendiente>
- <https://www.igrajucirasti.ba/blog/kriticko-misljenje/>
- https://www.pngkit.com/view/u2q8r5a9y3a9t4a9_ideas-spot-lights-searching-accessories-thoughts-foco-idea/
- <http://elojodeayacucho.blogspot.com/2018/04/el-ojo-de-ayacucho-atencion-se-rompio.html>
- Gráficos elaborados en GeoGebra